Session 2 - Algèbre -28 Juin 2018 Durée : 2h.

-

La clarté et la rédaction entreront pour une part importante dans la notation.
Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits.
Les exercices sont indépendants. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. (5 points.)

Soit a un paramètre réel. Soient $v_1 = \begin{pmatrix}1\\a\\1\\1\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}a\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $v_4 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}$. Soient $F = vect(v_1, v_2)$ et $G = vect(v_3, v_4)$.

1. Déterminer les dimensions de F et G suivant les valeurs du paramètre a.
2. Pour quelles valeurs de a a-t-on $F + G = \mathbf{R}^4$?
3. Dans ces conditions F et G sont-ils supplémentaires ?

Exercice 2. (4 points.)

Considérons l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique, $\mathcal{C} = (\epsilon_1, \epsilon_2)$. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la projection orthogonale sur la droite vectorielle $D = \{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, y - 2x = 0\}$.

1. Déterminer les images des vecteurs ϵ_1, ϵ_2 par g.
2. En déduire la matrice de g dans la base canonique et l'image $g(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix})$ d'un vecteur $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$.
3. Proposer une base $\mathcal{U}$ de E dans la quelle la matrice de g est :

   $[g]_{\mathcal{U}} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$

Exercice 3. (6 points.)

Soient $D \subset \mathbb{R}^3$ la droite passant par le point $A = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $u = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et D' la droite d'équations : $\begin{cases} 3x + y + 4z - 2 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases}$

1. Donner les équations paramétriques de D et un vecteur directeur v de D'.
2. Déterminer $D \cap D'$, intersection de D et D'. Les deux droites sont-elles coplanaires ?

3. On note n le vecteur $n = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Déterminer l'équation cartésienne du plan affine P qui contient D et a pour base les vecteurs u, n

   (b) Vérifier que le plan P' d'équation $x + y + 2z = 0$ est un plan qui contient D' et a pour base v, n.

   (c) Démontrer que $L = P \cap P'$ n'est pas vide et est une droite qui est perpendiculaire à D et à D'.

Exercice 4. **(6 points.)** Soit $m \in \mathbf{R}$ et $M_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ m & -1 & -m \end{pmatrix}$.

1. Calculer le déterminant de M_m.

   On considère l'endomorphisme f_m de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la bases canonique est M_m.

2. Pour quelles valeurs de m l'application f_m est-elle une bijection ?

3. Déterminer la matrice de la réciproque de f_m pour ces valeurs.

4. Déterminer l'image et le noyau de f_1.

Soit le système (S_m) :

$$(S_m) \left\{ \begin{array}{rrrcl} x & +y & +z & = & 3 \\ x & +my & +z & = & 2+m \\ mx & -y & -mz & = & -1. \end{array} \right.$$

5. Sans résoudre le système, dire pour quelles valeurs de m ce système possède une unique solution. On ne demande pas de calculer cette solution.

6. Résoudre complètement le système pour $m = 1$.